Die Schraubenflächen.

Eine monographische Studie.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

einer hohen

naturwissenschaftlichen Fakultät

der Eberhard-Karl-Universität zu Tübingen

vorgelegt

von

Max Heckhoff,

Oberlehrer in Sobernheim a. d. Nahe.

Bonn,

Universitäts-Buchdruckerei von Carl Georgi.

1894.

Angenommen

von der

naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Tübingen

am 16. Juni 1894.

Auf den folgenden Blättern werden die wichtigsten Krümmungsverhältnisse der Schraubenflächen behandelt, indem bekannte Resultate mit den Ergebnissen eigener Untersuchungen zu einem Ganzen verschmolzen sind. Eingehender werden insbesondere die Schraubenflächen von konstanter mittlerer Krümmung diskutiert, bei denen elliptische Funktionen in die Ergebnisse eintreten.

§ 1. Definition und analytische Darstellung der Schraubenflächen.

Wenn sämtliche Punkte einer ebenen oder räumlichen Kurve Schraubenlinien von gleicher Ganghöhe um dieselbe Axe beschreiben, so ist der Inbegriff aller dieser Schraubenlinien eine Schraubenfläche (Helikoidfläche). Jede Schraubenfläche kann aber durch die schraubenförmige Bewegung einer ebenen Kurve erzeugt werden. Den Schraubenflächen kommt die wichtige kinematische Bedeutung zu, dass ihnen die Koinzidenz mit ihnen selbst nicht verloren geht, wenn man denselben als je einem Ganzen eine schraubenförmige Bewegung um dieselbe Axe mit derselben Ganghöhe verleiht (cf. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces. Ire Partie. pag. 89). Gleichwie die Rotation eine schraubenförmige Bewegung mit der Ganghöhe Null ist, so sind auch die Rotationsflächen Sonderfälle der Schraubenflächen.

Man weiss, dass folgende Gleichungen eine Schraubenlinie darstellen:

$$x = v \,.\cos u, \quad y = v \,.\sin u, \quad z = g \,.\, u.$$

(cf. Joachimsthal, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung. pag. 4.) Dabei liegt die Axe des Zylinders, dem die Schraubenlinie aufliegt, in der z-Axe, die Grundfläche desselben in der $[xy]$-Ebene. Ferner bedeutet v den Grundflächenradius des Zylinders, u

einen veränderlichen, von der positiven Richtung der x-Axe an in der $[xy]$-Ebene gemessenen Winkel; endlich ist g die Konstante der schraubenförmigen Bewegung, deren 2π-faches Multiplum die Ganghöhe l ergibt. Stellt man sich nun vor, dass durch jeden Punkt einer in der $[xz]$-Ebene gelegenen Kurve $z=f(x)$ ein Zylinder mit dem veränderlichen Radius v um die x-Axe gelegt ist, so ergeben sich die Koordinaten der durch diese Kurve erzeugten Schraubenfläche in folgender Form als Funktionen zweier Veränderlichen:

$$x = v.\cos u,\ y = v.\sin u,\ z = gu + f(v).$$

Die Kurven $v =$ constans geben die Schraubenlinien auf der Fläche, die Kurven $u =$ constans sind die Vertikalschnitte.

Die Schraubenfläche lässt sich folgendermassen durch eine Gleichung darstellen:

$$z = g\,arc\,tang\frac{y}{x} + f(\sqrt{x^2+y^2}).$$

§ 2. Die Fundamentalgrössen.

Wir gehen bei der Untersuchung der Krümmungsverhältnisse der Schraubenflächen von dieser Form der Gleichungen aus:

$$x = v.\cos u,\ y = v.\sin u,\ z = g.u + f(v).$$

Der Bereich der unabhängigen Variabeln v lässt sich in der Weise beschränken, dass v alle und nur die Werte annehmen darf, die zur Darstellung der Generatrix notwendig sind, d. h. die Werte, welche $f(v)$ einen reellen Wert geben. Die Bezeichnungen schliessen sich im Folgenden an die an, welche Herr von Lilienthal in seinen „Untersuchungen zur allgemeinen Theorie der krummen Oberflächen und geradlinigen Strahlensysteme“ gebraucht.

Die Fundamentalgrössen erster Ordnung sind definiert durch die Gleichungen:

$$E = \left(\frac{\delta x}{\delta u}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{\delta u}\right)^2 + \left(\frac{\delta z}{\delta u}\right)^2,$$

$$F = \frac{\delta x}{\delta u}\cdot\frac{\delta x}{\delta v} + \frac{\delta y}{\delta u}\cdot\frac{\delta y}{\delta v} + \frac{\delta z}{\delta u}\cdot\frac{\delta z}{\delta v},$$

$$G = \left(\frac{\delta x}{\delta v}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{\delta v}\right)^2 + \left(\frac{\delta z}{\delta v}\right)^2.$$

Darnach ergibt sich:

$$E = g^2 + v^2,$$
$$F = gf'(v),$$
$$G = 1 + f'(v)^2.$$

Das Linearelement

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

nimmt für die Schraubenflächen folgende Form an:

$$ds^2 = (g^2 + v^2)\,du + 2gf'(v)\,du\,dv + (1 + f'(v)^2)\,dv^2.$$

Dasselbe hat für alle Punkte von gleichem v, d. h. für alle Punkte derselben Schraubenlinie denselben Wert.

Die Determinante der quadratischen Form, in der das Linearelement sich darstellt, hat folgende Gestalt:

$$EG - F^2 = g^2 + v^2 + v^2 f'(v)^2.$$

Das Nichtverschwinden dieser Determinante ist ein Kriterium dafür, dass die Fläche nicht degeneriert. Die Determinante wird als Summe von Quadraten nur Null, wenn gleichzeitig $g = 0$ und $v = 0$ ist, durch welche Gleichungen die z-Axe charakterisiert ist.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Koordinatenlinien überall senkrecht auf einander stehen, ist das identische Bestehen der Gleichung:

$$F = gf'(v) = 0.$$

Dieser Fall tritt ein, wenn

1. $g = 0$ ist. Diese Gleichung charakterisiert die grosse Gruppe derjenigen Schraubenflächen, die als Rotationsflächen bekannt sind.
2. $f'(v) = 0$, also $f(v) = \text{const.}$ ist. Diese Gleichung gibt die Schraubenfläche mit Leitebene (hélicoïde à plan directeur); dieselbe wird gebildet durch die Binormalen der

Schraubenlinie, welche sämtlich die z-Axe rechtwinklig schneiden.

Wir berechnen ferner die Grössen:

$$A = \frac{\delta y}{\delta u}\cdot\frac{\delta z}{\delta v} - \frac{\delta y}{\delta v}\cdot\frac{\delta z}{\delta u},$$

$$B = \frac{\delta z}{\delta u}\cdot\frac{\delta x}{\delta v} - \frac{\delta z}{\delta v}\cdot\frac{\delta x}{\delta u},$$

$$C = \frac{\delta x}{\delta u}\cdot\frac{\delta y}{\delta v} - \frac{\delta x}{\delta v}\cdot\frac{\delta y}{\delta u}.$$

Dieselben haben im vorliegenden Falle die folgenden Werte:

$$A = vf'(v)\cos u - g\sin u,$$
$$B = g.\cos u + vf'(v)\sin u,$$
$$C = -v.$$

Die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung sind folgendermassen definiert:

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\cdot\left[A\frac{\delta^2 x}{\delta u^2} + B\frac{\delta^2 y}{\delta u^2} + C\frac{\delta^2 z}{\delta u^2}\right],$$

$$\Theta' = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\cdot\left[A\frac{\delta^2 x}{\delta u\delta v} + B\frac{\delta^2 y}{\delta u\delta v} + C\frac{\delta^2 z}{\delta u\delta v}\right],$$

$$\Theta'' = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\cdot\left[A\frac{\delta^2 x}{\delta v^2} + B\frac{\delta^2 y}{\delta v^2} + C\frac{\delta^2 z}{\delta v^2}\right];\ \text{oder}$$

$$\left[\Theta = \frac{-v^2 f'(v)}{\sqrt{g^2+v^2+v^2 f'(v)^2}},\right.$$

$$\Theta' = \frac{g}{\sqrt{g^2+v^2+v^2 f'(v)^2}},$$

$$\Theta'' = \frac{-vf''(v)}{\sqrt{g^2+v^2+v^2 f'(v)^2}}.$$

Sowohl die Fundamentalgrössen erster Ordnung E, F und G, als auch die zweiter Ordnung Θ, Θ' und Θ'' hängen nur von einer der Variabeln ab. Enneper hat bewiesen, dass diese Eigenschaft in dem Masse charakteristisch ist, dass alle Flächen, bei denen E, F und G; Θ, Θ' und Θ'' nur von einer Variabeln abhängen, notwendig Helikoidflächen

sein müssen. (Göttingische Gelehrte Anzeigen, Jahrgang 1870, 3. pag. 335.) Da nun die Fundamentalgrössen der beiden Ordnungen allein die Krümmung einer Fläche bestimmen, so ergibt sich, dass die Krümmung in einem Punkte der Schraubenfläche nur von v abhängig ist, also von dem Abstand des betrachteten Punktes von der z-Axe. Sämtliche Punkte derselben Schraubenlinie haben also gleiche Krümmungsverhältnisse.

§ 3. Die mittlere Krümmung.

Um die Beschaffenheit einer Fläche in der Nähe eines gewissen Punktes zu untersuchen, denkt man sich die Fläche in diesem Punkte durch Ebenen geschnitten und betrachtet die Krümmung der so entstandenen ebenen Schnitte. Das Theorem von Meusnier zeigt, dass es zur Charakterisierung der Krümmungsverhältnisse in einem Punkte nur der Untersuchung der Normalschnitte bedarf. Bezeichnet ϱ den Krümmungsradius eines Normalschnitts, dessen Stellung durch das Verhältnis $\frac{dv}{du}$ gekennzeichnet ist, so ist:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\Theta du^2 + 2\Theta' du\,dv + \Theta'' dv^2}{E du^2 + 2F du\,dv + G dv^2},$$

also für die Schraubenflächen:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\sqrt{g^2+v^2+v^2f'(v)^2}} \cdot \frac{-v^2f'(v)du^2 + 2g du dv - vf''(v)dv^2}{(g^2+v^2)du^2 + 2gf'(v)du\,dv + (1+f'(v)^2)dv^2}.$$

Die Summe der Krümmungen zweier sich rechtwinklig schneidender Normalschnitte ist:

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = \frac{E\Theta'' - 2F\Theta' + G\Theta}{EG - F^2}.$$

Mithin ist für die Schraubenflächen:

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = \frac{-(g^2+v^2)vf''(v) - 2g^2f'(v) - v^2f'(v) - v^2f'(v)^3}{(g^2+v^2+v^2f'(v)^2)^{3/2}}.$$

Nun besteht die Gleichung:

$$\frac{d}{dv}\left\{\frac{v^2f'(v)}{\sqrt{g^2+v^2+v^2f'(v)^2}}\right\}=$$
$$\frac{v[(g^2+v^2)vf''(v)+2g^2f'(v)+v^2f'(v)+v^2f''(v)^3]}{\sqrt{g^2+v^2+v^2f'(v)^2}};$$

demnach:

$$\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho'}=-\frac{1}{v}\frac{d}{dv}\left\{\frac{v^2f'(v)}{\sqrt{g^2+v^2+v^2f'(v)^2}}\right\}^{*}).$$

Da nun die Summe der Krümmungen zweier sich rechtwinklig schneidender Normalschnitte von $\frac{dv}{du}$ unabhängig, also für den betrachteten Schnittpunkt von $u=$ const. und $v=$ const. konstant ist, so gilt der oben verzeichnete Wert auch für die Summe der Krümmungen der Hauptnormalschnitte, d. h. derjenigen Normalschnitte, in denen das Maximum resp. das Minimum der Krümmungen für diesen Punkt erreicht ist.

Bezeichnen t_1 und t_2 die Werte von $\frac{dv}{du}$, denen die Normalschnitte mit Maximal- resp. Minimalkrümmung entsprechen, so genügen dieselben der quadratischen Gleichung:

$$(E\Theta'-F\Theta)+(E\Theta''-G\Theta)t+(F\Theta''-G\Theta')t^2=0.$$

Dieselbe nimmt im vorliegenden Falle folgende Gestalt an:

$$g(g^2+v^2+v^2f'(v)^2)+(v^2(1+f'(v)^2)f'(v)-v(g^2+v^2)f'(v))t$$
$$-g(1+f'(v)^2+vf'(v)f''(v))t^2=0.$$

---

*) Anmerkung: Enneper schreibt irrtümlicher Weise:

$$\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho'}=v\frac{d}{dv}\left\{\frac{v^2f'(v)}{\sqrt{g^2+v^2+v^2f'(v)^2}}\right\}.$$

Dieser Irrtum ist jedoch für das bei ihm Folgende belanglos. [Enneper: Analyt.-Geometrische Untersuchungen in der Zeitschrift für Mathematik und Physik von Schlömilch, Kahl und Cantor. Jahrgang 1864, pag. 11.]

Dividieren wir durch $v(1+f'(v)^2)$, so folgt:

$$g\left[\frac{g^2}{v(1+f'(v)^2)}+v\right]+\left[vf'(v)-(g^2+v^2)\frac{f''(v)}{1+f'(v)^2}\right]t$$
$$-g\left[\frac{1}{v}+\frac{f'(v)f''(v)}{1+f'(v)^2}\right]t^2=0.$$

Die Werte der Hauptkrümmungsradien, d. i. der Krümmungsradien derjenigen Normalschnitte, deren Stellung durch die aus der letzten Gleichung zu bestimmenden Werte von $\frac{dv}{du}$ gefunden wird, bezeichnen wir mit ϱ_1 und ϱ_2. Dann ist, wie oben erwähnt wurde:

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}=\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho'}.$$

§ 4. Das Krümmungsmass

ist das reziproke Produkt der Hauptkrümmungsradien. Dasselbe wird durch folgenden Ausdruck dargestellt:

$$\frac{1}{\varrho_1\cdot\varrho_2}=\frac{\Theta\Theta''-\Theta'^2}{EG-F^2},$$

der sich für die Schraubenflächen folgendermassen gestaltet:

$$\frac{1}{\varrho_1\cdot\varrho_2}=\frac{v^3f'(v)f''(v)-g^2}{[g^2+v^2+v^2f'(v)^2]^2}$$
$$=\frac{-1}{\sqrt{g^2+v^2+v^2f'(v)^2}}\frac{d}{dv}\left\{\frac{v}{\sqrt{g^2+v^2+v^2f'(v)^2}}\right\}.$$

Das positive bezw. negative Zeichen des Krümmungsmasses gibt an, ob die Fläche im betrachteten Punkt elliptisch (positiv) oder hyperbolisch (negativ, sattelförmig) gekrümmt ist. Im vorliegenden Falle hängt das Zeichen von $\frac{1}{\varrho_1\cdot\varrho_2}$ wegen des quadratischen, also stets positiven Nenners nur vom Zähler ab. Ein Flächenpunkt hat also hyperbolische oder elliptische Krümmung, je nachdem

$$v^3f'(v)f''(v)\lesseqgtr g^2 \quad \text{ist.}$$

Der Grenzfall $\frac{1}{\varrho_1\cdot\varrho_2}=0$ zeigt an, dass eine der Haupt-

krümmungen gleich Null, also einer der Hauptkrümmungsradien unendlich gross ist. Gilt diese Gleichung für alle Punkte, so ist die Fläche auf die Ebene abwickelbar. Die Bedingung dafür ist also:

$$v^3 f'(v) f''(v) = g^2.$$

Die erste Integration ergibt, wenn c eine Integrationskonstante ist:

$$f'(v)^2 = c - \frac{g^2}{v^2}.$$

Dann folgt [b = Integrationskonstante]:

$$f(v) = \int \frac{cv}{\sqrt{cv^2 - g^2}}\, dv - g^2 \int \frac{dv}{v\sqrt{cv^2 - g^2}} + b$$

$$= \sqrt{cv^2 - g^2} + g \arcsin \frac{g}{\sqrt{c}\, v} + b.$$

Zur Reellität der Meridiankurve ist es notwendig, dass die Integrationskonstante c nur positive Werte grösser als $\frac{g^2}{v^2}$ annimmt.

Nun gilt der Satz, dass eine abwickelbare Fläche von einer Geraden muss erzeugt werden können (Hoppe, Prinzipien der Flächentheorie, Satz 18, pag. 49).

Es ist deshalb der Nachweis zu führen, dass die gefundene Fläche eine Schraubenregelfläche ist. In dieser Absicht stellen wir nach L'Abbé Aoust (Analyse infinitésimale des courbes tracées sur une surface quelconque, pag. 308) die Gleichung einer Schraubenfläche auf, die durch eine Kurve erzeugt wird, deren Ebene parallel zu einer festen Geraden sich schraubenförmig bewegt.

Die feste Gerade machen wir zur z-Axe; der Koordinatenanfang O habe von irgend einem Punkte A der Spur der Kurvenebene in der $[xy]$-Ebene den Abstand a. Alsdann legen wir durch A zwei Axen, und zwar soll die Spur die eine Axe AP, die in der Kurvenebene hierauf senkrechte Gerade AZ_1 die andere Axe sein. Auf dieses Axensystem bezogen, sei

$$z_1 = \varphi(\varrho)$$

die Gleichung der Kurve [im Falle der geraden Linie: $z_1 = l\varrho + m$].

Ferner sei α der konstante Winkel OAP, δ der veränderliche Winkel AOX.

Schliesslich seien x, y und z die Koordinaten eines Kurvenpunktes in bezug auf das ursprüngliche System. Es heissen dann die Gleichungen der erzeugten Schraubenfläche, wie folgt:

$$x = a\cos\delta + \varrho\cos(\alpha+\delta),$$
$$g = a\sin\delta + \varrho\sin(\alpha+\delta),$$
$$z = g\delta + \varphi(\varrho).$$

Denn ist zunächst der Abstand eines Kurvenpunktes S von der z-Axe:

$$v^2 = x^2 + y^2 = \varrho^2 + 2a\varrho\cos\alpha + a^2.$$

Unter Berücksichtigung dieser Gleichung lässt sich schreiben:

$$x = v[\cos(\alpha+\delta)\cos\psi + \sin(\alpha+\delta)\sin\psi] = v\cos(\alpha+\delta-\psi),$$
$$y = v[\sin(\alpha+\delta)\sin\psi - \cos(\alpha+\delta)\cos\psi] = v\sin(\alpha+\delta-\psi),$$

wenn $\cos\psi = \dfrac{\varrho + a\cos\alpha}{v}$, $\sin\psi = \dfrac{a\sin\alpha}{v}$ ist.

Die geometrische Bedeutung des Winkels ψ ist folgende: Heisst die Projektion eines Punktes S der Kurve auf die $[xy]$-Ebene R, so ist $\psi = ARO$.

Wir setzen nun:

$$u = \alpha + \delta - \psi = \alpha + \delta - arc\sin\frac{a\sin\alpha}{v}.$$

Dann heissen die Gleichungen der Schraubenfläche:

$$x = v\cos u, \quad y = v\sin u,$$

$$z = g\left(u - \alpha + arc\sin\frac{a\sin\alpha}{v}\right) + \varphi\left(\sqrt{v^2 - a^2\sin^2\alpha} - a\cos\alpha\right).$$

Ist nun die vorgelegte Kurve eine Gerade, so ist zu setzen:

$$\varphi\left(\sqrt{v^2 - a^2\sin^2\alpha} - a\cos\alpha\right) = l\left(\sqrt{v^2 - a^2\sin^2\alpha} - a\cos\alpha\right) + m.$$

Das Profil dieser Schraubenfläche in der $[xz]$-Ebene ergibt

sich durch die Annahme $y = 0$. Da alsdann auch $u = 0$ sein muss, so folgt:

$$z = l\sqrt{v^2 - a^2 \sin^2\alpha} - la\cos\alpha + m + g\,arc\sin\frac{a\sin\alpha}{v} - g\alpha.$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir als Profil der abwickelbaren Fläche, wenn

$$a\sin\alpha = \frac{g}{\sqrt{c}},\quad l = \sqrt{c},\qquad \text{also}$$

$$la\sin\alpha = g \qquad \text{ist, und}$$

$$m - g\alpha - la\cos\alpha = b \qquad \text{ist, das folgende:}$$

$$z = \sqrt{cv^2 - g^2} + g\,arc\sin\frac{g}{\sqrt{c}\,x} + b.$$

Wir beobachten die völlige Übereinstimmung mit unserem früheren Resultat.

§ 5. Spezielle Fälle.

Die gefundenen Resultate sollen in diesem Paragraphen spezialisiert werden für gewisse besondere Schraubenflächen, die wir zum Teil schon charakterisiert haben.

1. Für die windschiefe Schraubenfläche mit Leitebene haben wir in obigen Formeln zu setzen:

$$f(v) = const,\quad f'(v) = o.$$

Dann ergibt sich:

$$E = g^2 + v^2,\quad F = 0,\quad G = 1.$$

$$ds^2 = (g^2 + v^2)\,du^2 + dv^2.$$

$$EG - F^2 = g^2 + v^2.$$

$$\Theta = 0,\quad \Theta' = \frac{g}{\sqrt{g^2 + v^2}},\quad \Theta'' = 0.$$

$$\Theta\Theta'' - \Theta'^2 = -\frac{g^2}{g^2 + v^2}.$$

$$E\Theta'' - 2F\Theta' + G\Theta = 0.$$

Mithin finden wir:

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{\varrho_1\varrho_2} = 0.$$

Dieses Resultat kennzeichnet die Schraubenfläche mit Leitebene als Minimalfläche. Wir verdanken dasselbe Meusnier, welcher es in seinem Mémoire sur la courbure des surfaces 1776 veröffentlicht hat.

Ferner ist:

$$\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}=-\frac{g^2}{[g^2+v^2]^2}$$

Die vorliegende Schraubenfläche ist also überall hyperbolisch gekrümmt. In der Bestimmungsgleichung für die Hauptkrümmungsradien verschwindet das lineare Glied. Diese Gleichung heisst:

$$-\frac{g^2}{g^2+v^2}\varrho^2+g^2+v^2=0.$$

Ist $\varrho_1>\varrho_2$, so folgt:

$$\varrho_1=\frac{g^2+v^2}{g},\quad \varrho_2=-\frac{g^2+v^2}{g}.$$

2. Für die allgemeine Schraubenregelfläche ist zu setzen, wie aus § 4 hervorgeht:

$$f(v)=g\,arc\sin\frac{a\sin\alpha}{v}+l\sqrt{v^2-a^2\sin^2\alpha}-la\cos\alpha+m-g\alpha.$$

$$f'(v)=\frac{lv^2-ag\sin\alpha}{v\sqrt{v^2-a^2\sin^2\alpha}},$$

$$f''(v)=\frac{(v^2-a^2\sin^2\alpha)(lv^2+ag\sin\alpha)-v^2(lv^2-ag\sin\alpha)}{v^2\sqrt{(v^2-a^2\sin^2\alpha)^3}}.$$

$$E=g^2+v^2,\quad F=g\frac{lv^2-ag\sin\alpha}{v\sqrt{v^2-a^2\sin^2\alpha}},$$

$$G=v^4-v^2a^2\sin^2\alpha+(lv^2-ag\sin\alpha)^2.$$

$$EG-F^2=\frac{g^2v^2+v^4-v^2a^2\sin^2\alpha+l^2v^4-2lv^2ag\sin\alpha}{v^2-a^2\sin^2\alpha}.$$

$$\Theta=\frac{-v(lv^2-ag\sin\alpha)}{\sqrt{g^2v^2+v^4-v^2a^2\sin^2\alpha+l^2v^4-2lv^2ag\sin\alpha}},$$

$$\Theta'=\frac{g\sqrt{v^2-a^2\sin^2\alpha}}{\sqrt{g^2v^2+v^4-v^2a^2\sin^2\alpha+l^2v^4-2lv^2ag\sin\alpha}},$$

$$\Theta''=-\frac{(v^2-a^2\sin^2\alpha)(lv^2+ag\sin\alpha)-v^2(lv^2-ag\sin\alpha)}{v(v^2-a^2\sin^2\alpha)\sqrt{g^2v^2+v^4-v^2a^2\sin^2\alpha+l^2v^4-2lv^2ag\sin\alpha}}\cdot$$

$$\Theta\Theta''-\Theta'^2=\frac{-v^4(la\sin\alpha-g)^2}{g^2v^2+v^4-v^2a^2\sin^2\alpha+l^2v^4-2lv^2ag\sin\alpha}\cdot$$

Dieser Ausdruck ist nur Null, d. h. eine Schraubenregelfläche ist nur abwickelbar, wenn

$$g=al\sin\alpha$$ ist.

Für die abwickelbare Schraubenfläche, die wir noch genauer untersuchen wollen, ist zu setzen:

$$f(v)=\sqrt{cv^2-g^2}+g\,arc\sin\frac{g}{\sqrt{c}\,v}+b\cdot$$

$$f'(v)=\frac{\sqrt{cv^2-g^2}}{v},\quad f''(v)=\frac{g}{v^2\sqrt{cv^2-g^2}}$$

$$E=g^2+v^2,\ F=\frac{g}{v}\sqrt{cv^2-g^2}\quad G=1+c-\frac{g^2}{v^2}\cdot$$

$$ds^2=(g^2+v^2)du^2+2\frac{g}{v}\sqrt{cv^2-g^2}\,du\,dv+\left(1+c-\frac{g^2}{v^2}\right)dv^2\cdot$$

$$EG-F^2=v^2(1+c).$$

$$\Theta=-\sqrt{\frac{cv^2-g^2}{1+c}},\quad \Theta'=\frac{g}{v\sqrt{1+c}},$$

$$\Theta''=-\frac{g^2}{v^2\sqrt{cv^2-g^2}\sqrt{1+c}}\cdot$$

$$\Theta\Theta''-\Theta'^2=0.$$

$$E\Theta''-2F\Theta'+G\Theta=-\frac{cv^2\sqrt{1+c}}{\sqrt{cv^2-g^2}}.$$

Mithin finden wir:

$$\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}=0,\quad \frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}=\frac{-c}{\sqrt{cv^2-g^2}\sqrt{1+c}}\cdot$$

In der Bestimmungsgleichung für die Hauptkrümmungsradien verschwindet das quadratische Glied. Ist wieder $\varrho_1>\varrho_2$, so folgt:

$$\varrho_1=\infty,\quad \varrho_2=-\frac{\sqrt{cv^2-g^2}\,\sqrt{1+c}}{c}\cdot$$

3. Die Generatrix sei eine Gerade, die sich so bewegt, dass sie die Axe stets unter einem konstanten Winkel

schneidet. Das Vertikalprofil in der $[xz]$-Ebene hat die Gleichung: $z = ax + b$,
wenn a die Kotangente des konstanten Winkels, b eine Konstante bedeutet. Wir haben also zu setzen:

$$f(v) = av + b,$$
$$f'(v) = a, \quad f''(v) = 0.$$

Mithin ergibt sich:

$$E = g^2 + v^2, \quad F = ag, \quad G = 1 + a^2;$$
$$ds^2 = (g^2 + v^2)\,du^2 + 2ag\,du\,dv + (1 + a^2)\,dv^2.$$
$$EG - F^2 = g^2 + a^2 + a^2v^2.$$
$$\Theta = \frac{-av^2}{\sqrt{g^2 + v^2 + a^2v^2}}, \quad \Theta' = \frac{g}{\sqrt{g^2 + v^2 + a^2v^2}},$$
$$\Theta'' = 0.$$
$$\Theta\Theta'' - \Theta'^2 = -\frac{g^2}{g^2 + v^2 + a^2v^2}.$$
$$E\Theta'' - 2F\Theta' + G\Theta = \frac{-a(2g^2 + v^2 + a^2v^2)}{\sqrt{g^2 + v^2 + a^2v^2}}.$$

Mithin finden wir:

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{-a(2g^2 + v^2 + a^2v^2)}{\sqrt{(g^2 + v^2 + a^2v^2)^3}},$$
$$\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = \frac{-g^2}{(g^2 + v^2 + a^2v^2)^2}$$

Die Fläche ist stets hyperbolisch gekrümmt. Die Bestimmungsgleichung für die Hauptkrümmungsradien lautet:

$$\left[\frac{-g^2}{g^2 + v^2 + a^2v^2}\right]\varrho^2 + \left[\frac{a(2g^2 + v^2 + a^2v^2)}{\sqrt{v^2 + g^2 + a^2v^2}}\right]\varrho + (g^2 + v^2 + a^2v^2) = 0.$$

Schneidet die erzeugende Gerade die Axe stets senkrecht, so ist $a = 0$. Die Formeln ergeben dann die unter Nr. 1 abgeleiteten, welche für die Schraubenfläche mit Leitebene gelten.

Ist die erzeugende Gerade stets unter einem Winkel von 45^0 gegen die Axe geneigt, so ist $a = 1$ zu setzen. Es heissen dann die Formeln:

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{-2(g^2 + v^2)}{\sqrt{(g^2 + 2v^2)^3}}, \quad \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = \frac{-g^2}{(g^2 + 2v^2)^2}.$$

Wir bemerken noch, dass das Horizontalprofil der Flächen dieser Art eine archimedische Spirale ergibt. Für $a=1$ heisst dieselbe:

$$v=-g.u-b.$$

4. Die Generatrix in der $[xz]$-Ebene sei die Traktrix, eine ebene Kurve von der Art, dass das Stück der Tangente zwischen Berührungspunkt und z-Axe die konstante Länge l hat. Die x-Axe ist Tangente, die z-Axe Asymptote der Kurve. Die Differentialgleichung dieser Kurve heisst:

$$\frac{dx}{dz}=\frac{x}{\sqrt{l^2-x^2}}, \text{ oder}$$

$$dz=\frac{\sqrt{l^2-x^2}}{x}.$$

Die Integration ergibt:

$$z=\sqrt{l^2-x^2}+l\log\frac{l-\sqrt{l^2-x^2}}{x}.$$

Dann ist zu setzen:

$$f(v)=\sqrt{l^2-v^2}+l\log\frac{l-\sqrt{l^2-v^2}}{v},$$

$$f'(v)=\frac{\sqrt{l^2-v^2}}{v}, \quad f''(v)=-\frac{l^2}{v^2\sqrt{l^2-v^2}}.$$

Mithin ergibt sich:

$$E=g^2+v^2, \quad F=\frac{g}{v}\sqrt{l^2-v^2}, \quad G=\frac{l^2}{v^2}.$$

$$ds=(g^2+v^2)du^2+2\frac{g}{v}\sqrt{l^2-v^2}du.dv+\frac{l^2}{v^2}dv^2.$$

$$EG-F^2=g^2+l^2.$$

$$\Theta=-\frac{\sqrt{l^2-v^2}}{\sqrt{g^2+l^2}}, \quad \Theta'=\frac{g}{\sqrt{g^2+l^2}},$$

$$\Theta''=\frac{l^2}{v\sqrt{l^2-v^2}\sqrt{g^2+l^2}}.$$

$$\Theta\Theta''-\Theta'^2=-1.$$

$$E\Theta''-2F\Theta'+G=\frac{(l^2+g^2)(2v^2-l^2)}{v\sqrt{l^2-v^2}\sqrt{g^2+l^2}}.$$

Wir finden also:

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}=-\frac{2v^2-l^2}{v\sqrt{l^2-v^2}\sqrt{g^2+l^2}}.$$

Hieraus sieht man, dass längs der Schnittkurve des Traktrixhelikoids mit dem Zylinder $v=\frac{l}{2}\sqrt{2}$ die Hauptkrümmungsradien gleiche und entgegengesetzte Werte haben. Ferner ist:

$$\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}=-\frac{1}{g^2+l^2}.$$

Da dieses Ergebniss von v unabhängig ist, so gehört die Schraubenfläche der Traktrix, wie schon Dini (Comptes rendus. 1865. I. pag. 340) bemerkte, zu der geringen Zahl derjenigen bekannten Flächen, die konstantes negatives Krümmungsmass haben.

Es ergibt sich für die Hauptkrümmungsradien:

$$\varrho_1=v.\frac{\sqrt{l^2+g^2}}{\sqrt{l^2-v^2}},\quad \varrho_2=-\frac{\sqrt{l^2+v^2}\sqrt{l^2-g^2}}{v}.$$

Längs der Schnittkurve unserer Schraubenfläche mit dem Zylinder $v=\frac{l}{v}\sqrt{2}$ ist:

$$\varrho_1=\sqrt{g^2+l^2},\quad \varrho_2=-\sqrt{g^2+l^2}.$$

Der Zylinder $v=l$ umhüllt die ganze Schraubenfläche und zwar geschieht die Berührung in der Schraubenlinie:

$$x=l\cos u,\quad y=l\sin u,\quad z=gu.$$

Es lässt sich nachweisen, dass nur die Werte 0 und gu der Funktion $\varphi(u)$ die Fläche

$$x=v\cos u,\quad y=v\sin u,\quad z=\varphi(u)+\sqrt{l^2-v^2}+l\log\frac{l-\sqrt{l^2-v^2}}{v}$$

zu einer solchen von konstantem negativem Krümmungsmass machen.

5. Die Generatrix in der $[x\,z]$-Ebene sei ein Kreis. Es verschlägt nichts, wenn wir den Mittelpunkt des Erzeugungskreises auf der x-Axe annehmen. Die Entfernung des Mittelpunktes von dem Anfang sei b, der Kreisradius sei r; dann heisst die Gleichung des Kreises:

$$z^2+(x-b)^2=r^2, \quad \text{oder}$$
$$z=\pm\sqrt{r^2-(x-b)^2}.$$

Die durch die schraubenförmige Bewegung dieses Kreises entstehende Schraubenfläche heisst Röhrenschraubenfläche. Sie hat die Gleichungen:

$$v=v\cos u,\ y=v\sin u,\ z=gu+\sqrt{r^2-(v-b)^2}.$$

Die zu dieser Fläche zugehörige Rotationsfläche ist der Kreiswulst. Die Gleichung derselben entsteht, wenn man $g=0$ setzt.

Wir betrachten zunächst das Horizontalprofil dieses Helikoids in der $[x\,y]$-Ebene. Hierzu setzen wir $z=0$. Also haben wir:

$$gu=\pm\sqrt{r^2-(v-b)^2}, \qquad \text{oder}$$
$$v=b\pm\sqrt{r^2-g^2u^2}.$$

Die Untersuchung dieser Kurve ergibt, dass sie halbmondförmig ist und gegen die x-Axe symmetrisch liegt. Jeder Radius vektor, für den $u<\pm\frac{r}{g}$ ist, schneidet die Kurve in zwei Punkten, die um gleichviel jenseits und diesseits des Kreises mit dem Radius b um den Anfang liegen, auf dem Radius vektor gemessen. Zwei Kurvenpunkte auf demselben Radius vektor haben den grössten Abstand $2r$ für $u=0$, den kleinsten Abstand 0 für $u=\pm\frac{r}{g}$.

Die Kurve läuft also in zwei Spitzen aus. Diese Spitzen liegen auf der y-Axe, wenn (conf. pag. 6)

$$\frac{r}{g}=\frac{2\pi.r}{l}=\frac{\pi}{2}, \text{ also } r=\frac{l}{4} \text{ ist.}$$

Ist der Kreisradius r halb so gross wie die Differenz l der Höhen eines Punktes der Fläche vor und nach einem Umlaufe, so berühren sich die Spitzen der Kurve auf der negativen x-Axe. Ist das Verhältniss $\frac{r}{l}>\frac{1}{2}$, so greifen die Kurvenspitzen übereinander.

Für die Untersuchung der Fläche ist zu setzen:

$$f(v) = \pm\sqrt{r^2-(v-b)^2},$$

$$f'(v) = -\frac{-(v-b)}{\sqrt{r^2-(v-b)^2}},\quad f''(v) = \frac{-r^2}{\pm\sqrt{(r^2-(v-b)^2)^3}}.$$

$$E = g^2+v^2,\quad F = \frac{-g(v-b)}{\pm\sqrt{r^2-(v-b)^2}},$$

$$G = \frac{r^2}{r^2-(v-b)^2}.$$

$$EG-F^2 = \frac{(g^2+v^2)r^2-g^2(v-b)^2}{r^2-(v-b)^2}.$$

$$\Theta = -\frac{v^2(v-b)}{\sqrt{(g^2+v^2)r^2-g^2(v-b)^2}},\quad \Theta' = \frac{\pm g\sqrt{r^2-(v-b)^2}}{\sqrt{(g^2+v^2)r^2-g^2(v-b)^2}}.$$

$$\Theta'' = -\frac{r^2v}{\sqrt{(g^2+v^2)r^2-g^2(v-b)^2}\,[r^2-(v-b)^2]}.$$

$$\Theta\Theta''-\Theta'^2 = \frac{v^3r^2(v-b)-g^2[r^2-(v-b)^2]^2}{[r^2-(v-b)^2]\,[(g^2+v^2)r^2-g^2(v-b)^2]}.$$

$$\Theta''-2F\Theta'+G\Theta = \frac{(g^2+v^2)r^2v+2g^2(v-b)[r^2-(v-b)^2]+r^2v^2(v-b)}{[r^2-(v-b)^2]\sqrt{(g^2+v^2)r^2-g^2(v-b)^2}}.$$

Wir finden also:

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2} = \frac{(g^2+v^2)r^2v+2g^2(v-b)[r^2-(v-b)^2]+r^2v^2(v-b)}{\sqrt{[(g^2+v^2)r^2-g^2(v-b)^2]^3}}.$$

$$\frac{1}{\varrho_1\varrho_2} = \frac{v^3r^2(v-b)-g^2[r^2-(v-b)^2]^2}{[(g^2+v^2)r^2-g^2(v-b)^2]^2}.$$

Setzen wir in diesen Formeln für v nach einander die Werte $b-r$, b und $b+r$, so finden wir die mittlere Krümmung und das Krümmungsmass für sämtliche Punkte der Schraubenlinie, die der Axe zunächst liegt, für die der beiden mittleren Schraubenlinien und für die Punkte der Schraubenlinie, die der Axe am fernsten liegt. Wir erhalten für $v = b-r$:

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2} = \frac{g^2+(b-r)^2}{(b-r)^2.r}-\frac{1}{b-r},$$

$$\frac{1}{\varrho_1\varrho_2} = -\frac{1}{r(b-r)}.$$

für $v = b$:

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{b}{r\sqrt{g^2 + b^2}},$$

$$\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = -\frac{g^2}{r^2 (g^2 + b^2)^2}.$$

für $v = b + r$:

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{g^2 + (b+r)^2}{(b+r)^2 . r} + \frac{1}{b+r},$$

$$\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = \frac{1}{r(b+r)}.$$

Aus dem Zeichen des Krümmungsmasses ersehen wir, dass die Fläche sowohl Punkte elliptischer wie hyperbolischer Krümmung hat. Es liegt also nahe zu fragen, wo die Schraubenlinien auf der Fläche verlaufen, längs denen parabolische Krümmung vorhanden, das Krümmungsmass also Null ist. Diese Linien, die Demarkationslinien, teilen die Fläche in zwei Gebiete, in deren einem nur Punkte mit positivem, in deren anderem nur Punkte mit negativem Krümmungsmass vorkommen. Das letztere Gebiet ist der Axe zugewandt.

Um die Demarkationslinien hier zu finden, setzen wir den Zähler von $\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}$ gleich Null.

$$v^3 r^2 (v - b) - g^2 [r^2 - (v - b)^2]^2 = 0.$$

Zur Vereinfachung der Rechnung nehmen wir an, der Kreis berühre stets die z-Axe, d. h. b sei gleich r. Ferner sei $g = r$, also $l = 2r\pi$, dann heisst diese Gleichung:

$$v^4 - v^3 r - r^4 + 2r^2 (v - r)^2 - (v - r)^4 = 0.$$

Hieraus ergibt sich:

$$v = \frac{4}{3} r.$$

Längs der Schnittlinie unseres Kreis-Helikoids mit dem Zylinder $v = \frac{4}{3} r$ ist parabolische Krümmung vorhanden*).

*) Anmerkung: Herr Kuen hat eine der unsrigen ähnliche Röhrenschraubenfläche, welche nämlich durch Schraubenbewe-

6. Für die Rotationsflächen ist g gleich Null zu setzen. Dann finden wir:

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}=\frac{-v^2f''(v)-vf'(v)(1+f'(v)^2)}{v^2\sqrt{(1+f'(v)^2)^3}}=-\frac{1}{v}\frac{d}{dv}\frac{vf'(v)}{\sqrt{1+f'(v)^2}}.$$

$$\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}=\frac{f'(v)f''(v)}{v(1+f'(v)^2)^2}.$$

Die Krümmungsradien haben also die Werte:

$$\varrho_1=-\frac{v\sqrt{1+f'(v)^2}}{f'(v)},\quad \varrho_2=-\frac{[1+f'(v)^2]^{3/2}}{f''(v)}.$$

Wir leiten ferner diejenige Rotationsfläche ab, welche Minimalfläche, also durch die Eigenschaft $\varrho_1+\varrho_2=0$ ausgezeichnet ist, weil dieselbe später noch mehrfach auftreten wird. Um diese Fläche zu finden, ist das $\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}$ der Rotationsflächen gleich Null zu setzen, dann ergibt sich die Differentialgleichung:

$$\frac{vf'(v)}{\sqrt{1+f'(v)^2}}=\text{const.}=a,\quad \text{oder}$$

$$\frac{f'(v)}{\sqrt{1+f'(v)^2}}=\frac{a}{v}.$$

Rechnen wir hieraus $f'(v)$ aus, so haben wir:

$$df(v)=\frac{a\,dv}{\sqrt{v^2-a^2}}.$$

Die Integration ergibt, wenn b die Integrationskonstante ist:

$$f(v)=a\log(\sqrt{v^2-a^2}+v)-b\quad\text{oder}$$

$$f(v)=-a\log(\sqrt{v^2-a^2}-v)-b.$$

Um das Vertikalprofil in der $[x\,z]$-Ebene zu finden, ersetzen wir $f(v)$ durch z, ferner v durch x; dann folgt:

---

gung einer Kugel entsteht, mit einem System ebener Krümmungslinien berechnet und modelliert. cf. Mathematische Modelle, angefertigt im mathematischen Institut der k. technischen Hochschule in München unter Leitung von Prof. Dr. Brill, No. 24.

$$\sqrt{x^2 - a^2} + x = e^{\frac{z+b}{a}},$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} - x = e^{-\frac{z+b}{a}},$$

also:

$$x = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{z+b}{a}} - e^{-\frac{z+b}{a}}\right).$$

e ist die Basis des natürlichen Logarithmensystems. Diese Gleichung ist die der Kettenlinie. Die Umdrehungsfläche derselben, welche das Katenoid oder die Alysseide genannt wird, ist also Minimalfläche und zwar die einzige Fläche dieser Art unter den Rotationsflächen.

§ 6. Die Schraubenflächen konstanter mittlerer Krümmung.

Bei den Schraubenflächen konstanter mittlerer Krümmung soll die im § 3 gefundene Summe der reziproken Werte der Hauptkrümmungsradien in allen Punkten derselben gleich einer Konstanten $-\frac{2}{a}$ sein. Wir setzen also:

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = -\frac{1}{v}\frac{d}{dv}\left\{\frac{v^2 f'(v)}{\sqrt{v^2 + g^2 + v^2 f'(v)^2}}\right\} = -\frac{2}{a}.$$

Die erste Integration führt eine Konstante b ein:

$$\frac{v^2 f'(v)}{\sqrt{g^2 + v^2 + v^2 f'(v)^2}} = \frac{v^2 + a\,b}{a}.$$

Es ergibt sich hieraus, dass die linke Seite, also auch $f'(v)$ für den Wert $v^2 = -ab$ gleich Null wird, dass für diesen Wert von v^2 die Tangente der Kurve $z = f'(v)$ vertikal ist. Kann dies wirklich eintreten, so müssen a und b ungleiche Zeichen haben. Wir unterscheiden demnach zunächst die beiden Fälle:

1. $a > 0 > b$; 2. $b > 0 > a$.

Die Annahme 3. $b = 0$ ergibt bedeutende Vereinfachung des Schlussergebnisses.

Setzen wir 4. $\frac{1}{a} = 0$, so erhalten wir die Minimalflächen unter den Schraubenflächen, deren charakteristische Eigenschaft die ist, dass sie gleiche Hauptkrümmungsradien von entgegengesetztem Vorzeichen haben, so dass

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = 0 \quad \text{ist.}$$

Die Voraussetzung 5. $\frac{1}{a} = b = 0$ zieht nach sich:

$$f'(v) = 0\,, \quad f(v) = \text{const};$$

sie ergiebt also die Schraubenflächen à plan directeur (cf. § 5, 1.).

6. Als letzten Fall werden wir den behandeln, dass die Konstante g der Schraubenbewegung gleich Null gesetzt wird, wodurch wir zu den Rotationsflächen konstanter mittlerer Krümmung gelangen.

1. $a > 0 > b$.

Die obige Gleichung ergibt nach Anwendung der Substitution $v^2 = w$:

$$f(v) = \frac{1}{2}\int \frac{(w+ab)(w+g^2)\,dw}{w\sqrt{(w+g^2)(a^2w - [w+ab]^2)}}.$$

Da $v = \sqrt{w}$ ist, so dürfen wir nur positive Werte für w zulassen. Da alsdann $w+g^2$ stets positiv ist, so ist zur Reellität der Wurzel im Nenner erforderlich, dass der Faktor

$$a^2w - [w+ab]^2 = -(w-\alpha)(w-\beta) > 0$$

ist. Damit diese Bedingung erfüllt sei, muss eine der Ungleichungen

$$\alpha \gtrless w \gtrless \beta$$

richtig sein, je nachdem $\alpha \gtrless \beta$ ist. Hier bedeuten:

$$\alpha = \frac{a^2 - 2ab + a\sqrt{a^2 - 4ab}}{2}\,, \quad \beta = \frac{a^2 - 2ab - a\sqrt{a^2 - 4ab}}{2}.$$

In der Erwägung, dass $a > 0$, $b < 0$ ist, erkennen wir leicht, dass α und β reell und positiv sind, dass ferner $\alpha > \beta$ ist, der Wertbereich der Variablen w vollständig festgelegt ist.

Da in dem vorliegenden Integrale für $f(v)$ die Variable im Radikanden des Nenners in der dritten Potenz vorkommt, so ist dasselbe ein elliptisches. Um dasselbe auf die Normalform zu bringen, benutzen wir eine Substitution von der Form:

$$w = \frac{p+q\varrho}{r+s\varrho},$$

in der die Grössen p, q, r und s noch so zu bestimmen sind, dass den Werten $-g^2$, β, α, ∞ von w die Werte ∞, 0, 1, $\frac{1}{k^2}$ von ϱ entsprechen.

Dann ergibt sich:

$$w = \frac{\beta + g^2k^2\varrho}{1-k^2\varrho}, \quad k^2 = \frac{\alpha-\beta}{g^2+\alpha}.$$

Es ist sogleich ersichtlich, dass k^2 der Modul des zu erwartenden elliptischen Normal-Integrals positiv ist und die Einheit nicht erreicht. Die gefundene Substitution bringt das Integral in die folgende Form:

$$f(v) = \frac{(g^2+\beta)\sqrt{g^2+\alpha}}{2}\int \frac{1}{1-k^2\varrho} + \frac{ab}{\beta+g^2k^2\varrho} \frac{d\varrho}{\sqrt{\varrho(1-\varrho)(1-k^2\varrho)}},$$

welche durch die weitere Substitution $\varrho = \sin^2\varphi$ folgende Gestalt annimmt:

$$f(v) = \frac{(g^2+\beta)\sqrt{g^2+\alpha}}{2}\int \frac{d\varphi}{\Delta^2\varphi\Delta\varphi} + \frac{\sqrt{\alpha(g^2+\beta)}(g^2+\alpha)}{2\sqrt{\beta}}\int \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\Delta\varphi},$$

$$= \mathrm{I} + \mathrm{II},$$

wenn $\Delta^2\varphi = 1-k^2\sin^2\varphi$ und $n = -\frac{g^2k^2}{\beta}$ ist. Das Zeichen der Wurzeln ist in Erwägung der Gleichung $\sqrt{\alpha\beta} = ab$ zu wählen.

Die weitere Behandlung dieser Integrale besteht in der Einführung der Jacobi'schen Bezeichnungen für die elliptischen Funktionen und deren Darstellung durch die Θ-Funktion. Zu diesem Zwecke setzen wir:

$$F(\varphi) = \int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \psi, \quad \text{so dass } \varphi = \mathrm{am}\ \psi \text{ ist;}$$

$$E(\psi) = \int \Delta^2 \operatorname{am}\ \psi\, d\psi.$$

Dann wird:

$$\int \frac{d\varphi}{\Delta^2\varphi\,\Delta\varphi} = -\frac{k^2}{k'^2}\frac{\sin am\,\psi \cos am\,\psi}{\Delta am\,\psi} + \frac{E(\psi)}{k'^2},$$

(cf.: Durège, Theorie der ellipt. Funktionen. 4. Aufl., § 19, pag. 75) worin k' den zu k gehörigen komplementären Modulus bedeutet.

Wir bezeichnen nun mit K bezw. K' das vollständige Integral erster Gattung für den Modul k bezw. k', mit E das vollständige Integral zweiter Gattung für den Modul k. Ferner definieren wir:

$$q = l^{-\pi\frac{K'}{K}}, \quad q' = l^{-\pi\frac{K}{K'}},$$

$$\Theta(\psi) = 1 + 2\sum_1^\infty{}_n (-1)^n q^{n^2} \cos\frac{n\pi.\psi}{K},$$

$$H(\psi) = 2\sum_0^\infty{}_n (-1)^n \sqrt[4]{q^{(2n+1)^2}} \sin\frac{(2n+1).\pi.\psi}{K}.$$

(cf. Jacobi, Fundamenta nova § 35, 61, 62, oder Durège, l. c. § 54, 65, 68). Dann besteht die Gleichung:

$$\int \frac{d\varphi}{\Delta^2\varphi\,\Delta\varphi} = -\frac{\sqrt{\alpha-\beta}\,\sqrt{g^2+\alpha}}{g^2+\beta}\frac{H(\psi)H(\psi+K)}{\Theta(\psi)\Theta(\psi+K)} + \frac{g^2+\alpha}{g^2+\beta}\cdot\frac{E}{K}\psi + \frac{g^2+\alpha}{g^2+\beta}\cdot\frac{\Theta'(\psi)}{\Theta(\psi)}.$$

Dabei bedeutet Θ' den Differentialquotienten von Θ nach ψ. Wir erhalten zum Schluss:

$$I = -\tfrac{1}{2}(g^2+\alpha)\sqrt{\alpha-\beta}\,\frac{H(\psi)H(\psi+K)}{\Theta(\psi)\Theta(\psi+K)} + \tfrac{1}{2}(g^2+\alpha)^{3/2}\frac{E}{K}\psi + \tfrac{1}{2}(g^2+\alpha)^{3/2}\frac{\Theta'(\psi)}{\Theta(\psi)}.$$

In dem Integral dritter Gattung in Π. kann n jeden Wert von 0 bis ∞ annehmen. Um von der Legendre'schen Normalform zur Jacobi'schen zu gelangen, setzen wir:

$$n = \frac{g^2k^2}{\beta} = -k^2 \sin^2 am\, i\omega = k^2 \operatorname{tang}^2 am\,(\omega, k').$$

woraus sich $\sin am(\omega, k')$ und $\Delta am(\omega, k')$ leicht berechnen lassen.

Bezeichnen wir das Integral dritter Gattung in der Jacob i'schen Normalform mit $\Pi(\psi)$, so ergibt sich im vorliegenden Falle:

$$\int \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\Delta\varphi} = \psi + \frac{g\sqrt{\beta(g^2+\alpha)}}{(g^2+\beta)\sqrt{\alpha}} i\Pi(\psi, iu)$$

(cf. Durège, l. c. § 69).

Führen wir nunmehr auch hier (unter Benutzung der Gleichungen Durège § 67,1 und § 71,1) die Θ-Funktionen ein, so kommt, wenn K' das vollständige Integral erster Gattung für den Modul k' bedeutet:

$$\Pi = \left[\frac{\sqrt{\alpha\beta(g^2+\alpha)}}{2} + \frac{g(g^2+\alpha)\pi.\omega}{4KK'} + \frac{g(g^2+\alpha)}{2}\frac{\Theta'(\omega,k')}{\Theta(\omega,k')}\right]\psi$$
$$+ \frac{1}{4} g(g^2+\alpha) i \log\frac{\Theta'(\psi - i\omega)}{\Theta(\psi - i\omega)}.$$

Dabei ist:

$$\Theta(\psi \pm iw) = \left[1 + \sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2} \cos\frac{n\pi.\omega}{K}\left(e^{\frac{n\pi.\omega}{K}} + e^{\frac{n\pi.\omega}{K}}\right)\right]$$
$$\mp i\sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2} \sin\frac{n\pi.\omega}{K}\left(e^{\frac{n\pi.\omega}{K}} - e^{\frac{n\pi.\omega}{K}}\right)$$
$$= A \mp iB.$$

Nun besteht die Bezeichnung:

$$\tfrac{1}{2} i \log\frac{A+iB}{A-iB} = -arc\,\text{tang}\frac{A}{B}.$$

Also heisst unser Schlussergebnis:

$$f(v) = I + \Pi = \psi\left[\tfrac{1}{2}(g^2+\alpha)^{3/2}\frac{E}{K} + \frac{\sqrt{\alpha\beta(g^2+\alpha)}}{2}\right.$$
$$\left. + \frac{g(g^2+\alpha).\pi.\omega}{4KK'} + \frac{g(g^2+\alpha)}{2}\frac{\Theta'(\omega,k')}{\Theta(\omega,k')}\right] - \tfrac{1}{2}(g^2+\alpha)\sqrt{\alpha-\beta}\frac{H(\psi)H(\psi+K)}{\Theta(\psi)\Theta(\psi+K)}$$
$$+ \tfrac{1}{2}(g^2+\alpha)^{3/2}.\frac{\Theta'(\psi)}{\Theta(\psi)} - \tfrac{1}{2} g(g^2+\alpha) arc\,\text{tang}\frac{B}{A}.$$

Der Gang der numerischen Rechnung ist folgender: Nachdem α, β [bezw. a und b] und g als Data der Aufgabe

festgelegt sind, nimmt man für w einen zwischen α und β liegenden Wert an, berechnet mit Hülfe desselben zunächst ϱ, dann φ. Alsdann liefert die Gleichung

$$\psi = F(\varphi, k)$$

den Wert für ψ. Da nun ferner

$$\sin am(\omega, k') = \sqrt{\frac{g^2}{g^2+\beta}} = \sin \sigma \qquad \text{ist,}$$

so folgt: $$\omega = F(\sigma, k').$$

Die so gefundenen Werte wären in die Schlussformel einzusetzen.

2. $b > 0 > a$.

Die Behandlung dieses Falles ist genau übereinstimmend mit der des vorhergehenden. Die erste auftretende Abweichung ist die, dass α und β zwar reell und positiv sind, dass aber $\beta > \alpha$ ist. Es werden demzufolge in der anzuwendenden Substitution α und β ihre Plätze vertauschen. Die weitere Rechnung ergibt, dass wir das Resultat der vorigen Untersuchung auch als das der vorliegenden ansehen können, nachdem wir überall α durch β und umgekehrt ersetzt haben.

3. $b = 0$.

Das zu transformierende Integral nimmt die Form an:

$$f(v) = \tfrac{1}{2}\int \frac{(g^2+w)\,dw}{\sqrt{w(g^2+w)(a^2-w)}}.$$

Zur Reellität der Wurzel ist notwendig, dass die stets positive Variable w nur von 0 bis a^2 sich bewege. Da nun für $b = 0$ die im Falle 1. mit α und β bezeichneten Grenzen des Wertbereichs von w in a^2 und 0 übergehen, so ist die hier anzuwendende Substitution aus der allgemeinen durch $b = 0$ herzuleiten. Wir gelangen deshalb auch zu einem richtigen Ergebnis, wenn wir in der Schlussformel $b = 0$ setzen. Wir erhalten somit:

$$f(v) = \tfrac{1}{2}(g^2+a)^{3/2}\frac{E}{K}\psi - \frac{a(g^2+a)}{2}\frac{H(\psi)H(\psi+K)}{\Theta(\psi)\Theta(\psi+K)} + \tfrac{1}{2}(g^2+a)^{3/2}\frac{\Theta'(\psi)}{\Theta(\psi)}.$$

4. $\frac{1}{a} = 0.$

Wir erhalten als Differentialgleichung der Minimalschraubenflächen:

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = -\frac{1}{v}\frac{d}{dv}\left\{\frac{v^2 f'(v)}{\sqrt{g^2+v^2+v^2 f'(v)^2}}\right\} = 0.$$

Da $\frac{1}{v}$ nicht allgemein 0 sein kann, so folgt:

$$\frac{v^2 f'(v)}{\sqrt{g^2+v^2+v^2 f'(v)^2}} = \text{const.} = b.$$

Mithin ergiebt sich:

$$f'(v)^2 . v^2(v^2-b^2) = b^2(g^2+v^2), \qquad \text{also:}$$

$$f(v) = b\int \frac{1}{v}\sqrt{\frac{g^2+v^2}{v^2-b^2}}\, dv + c,$$

wenn c eine Integrationskonstante bedeutet. Dann folgt:

$$f(v) = b\int \frac{v\, dv}{\sqrt{(g^2+v^2)(v^2-b^2)}} + bg^2\int \frac{dv}{\sqrt{(g^2+v^2)(v^2-b^2)}} + c,$$

$$f(v) = b(P+g^2 Q) + c.$$

Zur Ausrechnung des Integrals P setzen wir zunächst $v^2 = t$, so ergiebt sich:

$$P = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{(t+g^2)(t-b^2)}}, \text{ oder}$$

$$P = \frac{1}{2}\log \frac{\sqrt{v^2+g^2}+\sqrt{v^2-b^2}}{\sqrt{v^2+g^2}-\sqrt{v^2-b^2}}.$$

Von diesem Werte unterscheidet sich nur durch eine additive Konstante, quod licet, der folgende:

$$P = \log\left[\sqrt{v^2+g^2}+\sqrt{v^2-b^2}\right].$$

Es bleibt noch Q auszurechnen. Durch die Substitution $v^2 = t$ wird:

$$Q = \int \frac{dv}{v\sqrt{v^2+g^2)(v^2-b^2)}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t\sqrt{(t+g^2)(t-b^2)}}, \text{ oder:}$$

$$Q = +\frac{1}{gb}\, arc\, tang \frac{v^2 \mp \sqrt{(v^2+g^2)(v^2-b^2)}}{gb}.$$

Durch die Differentation ergibt sich, dass nur das +Zeichen vor der Wurzel zulässig ist. Demnach ist für alle diejenigen Schraubenflächen, die Minimalflächen sind, die Funktion $f(v)$ durch folgende Summe dargestellt:

$$f(v) = \frac{1}{2} b \log \frac{\sqrt{v^2+g^2}+\sqrt{v^2-b^2}}{\sqrt{v^2+g^2}+\sqrt{v^2-b^2}} + garc\,tang \frac{v^2+\sqrt{(v^2+g^2)(v^2-b^2)}}{gb} + c,$$

oder:

$$f(v) = b \log\left(\sqrt{v^2+g^2}+\sqrt{v^2-b^2}\right) + garc\,tang \frac{v^2+\sqrt{(v^2+g^2)(v^2-b^2)}}{gb} + c.$$

Diese Fläche ist schon berechnet worden

1. von Enneper [cf. Zeitschrift für Mathematik und Physik. Jahrgang 9. 1864, pag. 111]. Derselbe fand auf eben dem Wege, der hier eingeschlagen ist*):

$$f(v) = \frac{1}{2} b \log \frac{\sqrt{v^2+g^2}+\sqrt{v^2-b^2}}{\sqrt{v^2+g^2}+\sqrt{v^2-b^2}} + garc\,tanc \frac{v}{b}\sqrt{\frac{v^2-b^2}{v^2+g^2}} + c.$$

2. von Scherk (Crelle 13, Jahrgang 1834), der als Integral der Differentialgleichung der Minimalflächen folgenden Ausdruck fand:

$$f(v) = b \log\left(\sqrt{v^2+g^2}+\sqrt{v^2-b^2}\right) + garc\,tang \frac{b}{g}\sqrt{\frac{v^2+g^2}{v^2-b^2}}.$$

Der zweite Term muss mit negativem Zeichen angefügt werden, um die Übereinstimmung mit den Enneperschen Formeln herzustellen.

Das Linearelement dieser Minimal-Schraubenfläche ist:

$$ds^2 = (g^2+v^2)\,du^2 + 2\frac{gb}{v}\sqrt{\frac{v^2+g^2}{v^2-b^2}}\,du\,dv + \frac{v^2(v^2-b^2)+b^2(v^2+g^2)}{v^2(v^2-b^2)}\,dv^2.$$

---

*) Anmerkung. Der zweite Term ist bei Enneper durch einen Druckfehler entstellt worden. Das v vor der Wurzel muss durch g ersetzt werden.

Untersuchen wir diese Fläche hinsichtlich ihres Krümmungsmasses, so ergibt sich:

$$\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = -\frac{g^2+b^2}{(g^2+v^2)^2}.$$

Somit ist:

$$\varrho_1 = \frac{g^2+v^2}{\sqrt{g^2+b^2}}, \quad \varrho_2 = -\frac{g^2+v^2}{\sqrt{g^2+b^2}}.$$

5. $\frac{1}{a} = \mathfrak{b} = 0.$

Dieser Fall ist schon oben erledigt; sein Ergebnis kann aber auch aus dem des Falles 4. leicht hergeleitet werden.

6. $g = 0.$

Die Bedingung der Rotationsflächen von konstanter mittlerer Krümmung heisst:

$$-\frac{1}{v}\frac{d}{dv}\left\{\frac{vf'(v)}{\sqrt{1+f'(v)^2}}\right\} = -\frac{2}{a},$$

deren erste Integration die Gleichung liefert:

$$\frac{vf'(v)}{\sqrt{1+f'(v)^2}} = \frac{v^2+ab}{a}.$$

Hier greifen nun bezüglich der beiden Konstanten a und b dieselben Erwägungen platz wie bei den Schraubenflächen. Es müssen wieder a und b ungleiches Zeichen haben. Ob nun $a > 0 > b$, oder $b > 0 > a$ ist, in jedem Falle ist das Integral

$$f(v) = \frac{1}{2}\int \frac{w+ab}{\sqrt{-w(w-\alpha)(w-\beta)}}\,dw$$

zu transformieren, in welchem $\alpha \gtrless w \gtrless \beta$ sein muss, je nachdem $\alpha \gtrless \beta$ ist. Die Werte von α und β sind nicht geändert. Im ersten Falle lautet das Ergebnis:

$$f(v) = \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\int \frac{d\varphi}{\Delta^2\varphi\,\Delta\varphi} + \frac{\sqrt{\beta}}{2}\int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

$$= \psi\left[\frac{\sqrt{\beta}}{2} + \frac{\sqrt{\alpha}}{2}\frac{E}{K}\right] - \frac{\sqrt{\alpha-\beta}}{2}\frac{H(\psi)\,H(\psi+K)}{\Theta(\psi)\,\Theta(\psi+K)} + \frac{\sqrt{\alpha}}{2}\cdot\frac{\Theta'(\psi)}{\Theta(\psi)}.$$

Das Ergebnis des zweiten Falles ergibt sich aus diesem unmittelbar durch Vertauschung von α und β.

Für $b = 0$ erhalten wir:

$$f(v) = \int \frac{v\,dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = -\sqrt{a^2 - v^2} \quad \text{[Kugel]}.$$

Für $\frac{1}{a} = 0$ ergibt sich:

$$f(v) = \int \frac{b\,dv}{\sqrt{v^2 - b^2}} = \pm b \log\left[\sqrt{v^2 - b^2} \pm v\right] + c.$$

[Rotationsfläche der Kettenlinie cf. pag. 24.]

Die geodätischen Linien auf den Rotationsflächen konstanter mittlerer Krümmung hat Herr von Braunmühl berechnet und auf Modellen aufgezeichnet [cf. Mathematische Modelle etc. No. 8].

§ 7. Die Schraubenfläche mit konstantem Krümmungsmass.

Wir fanden, dass die Schraubenfläche der Traktrix konstantes negatives Krümmungsmass hat. Wir fragen jetzt allgemein: Welche Schraubenflächen haben konstantes negatives Krümmungsmass? Es soll also die Gleichung bestehen:

$$\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = \frac{v^3 f'(v) f''(v) - g}{(g^2 + v^2 + v^2 f'(v)^2)^2} = -c^2.$$

Daraus folgt:

$$v^3 f'(v) f''(v) + c^2 v^4 (1 + f'(v)^2)^2 + 2c^2 g^2 v^2 (1 + f'(v)^2) = g^2 (1 - c^2 g^2).$$

Wir setzen nun:

$$1 + f'(v)^2 = \varphi(v),$$

so folgt nach einer Division durch $v^2 c^2$:

$$\frac{v}{2c^2} \varphi'(v) + v^2 \varphi(v)^2 + 2g^2 \varphi(v) = \frac{g^2}{v^2}\left(\frac{1 - c^2 g^2}{c^2}\right).$$

Wir setzen ferner:

$$\frac{1 - c^2 g^2}{c^2} = l^2,$$

so ergibt sich:

$$(g^2 + l^2) \frac{v}{2} \varphi'(v) + v^2 \varphi(v)^2 + 2g^2 \varphi(v) = \frac{g^2}{v^2} l^2.$$

Endlich setzen wir:

$$v^2 \varphi(v) + g^2 = \Phi_1,$$
$$v^3 \varphi'(v) - 2g^2 = \Phi_2,$$

dann nimmt die Differentialgleichung folgende Form an:

$$\Phi_1^2 + A\Phi_2 = 0,$$

worin A eine Konstante von der Form $\frac{g^2+l^2}{2}$ ist. Zwischen Φ_1 und Φ_2 besteht die Beziehung:

$$v \frac{d\Phi_1}{dv} = 2\Phi_1 + \Phi_2, \qquad \text{oder}$$
$$v \frac{d\Phi_1}{dv} = 2\Phi_1 - \frac{\Phi_1^2}{A},$$
$$\frac{A d\Phi_1}{2A\Phi_1 - \Phi_1^2} = \frac{dv}{v}.$$

Wenn k eine Konstante der Integration ist, so ergibt sich:

$$A \int \frac{d\Phi_1}{2A\Phi_1 - \Phi_1^2} + \frac{1}{2} \log k = \int \frac{dv}{v}.$$

Nun ist:

$$\int \frac{d\Theta_1}{\Phi_1(2A - \Phi_1)} = \frac{1}{2A} \left[\int \frac{d\Phi_1}{\Phi_1} + \int \frac{d\Phi_1}{2A - \Phi_1} \right]$$
$$= \frac{1}{2A} \left[\log \Phi_1 - \log (2A - \Phi_1) \right].$$

Also erhalten wir:

$$\frac{1}{2} \log \Phi_1 - \frac{1}{2} \log (2A - \Phi_1) + \frac{1}{2} \log k = \log v,$$
$$\log \sqrt{\frac{k\Phi_1}{2A - \Phi_1}} = \log v,$$
$$k\Phi_1 = 2A v^2 - v^2 \Phi_1,$$
$$\Phi_1 = \frac{v^2 (l^2 + g^2)}{v^2 + k},$$

$$\varphi(v) = \frac{l^2v^2 - g^2k}{v^2(v^2+k)},$$

$$f'(v) = \frac{\sqrt{l^2v^2 - g^2k - v^4 - v^2k}}{v^2(v^2+k)}.$$

Wir erhalten also als Profil dieser Schraubenfläche:

$$f(v) = \int \frac{\sqrt{l^2v^2 - g^2k - v^4 - v^2k}}{v^2(v^2+k)}\, dv.$$

Für $k=0$ erhalten wir das Profil der Traktrix:

$$f(v)_{k=0} = \int \frac{\sqrt{l^2 - v^2}}{v} dv.$$

Setzen wir statt l^2 wieder den Wert $\frac{1 - c^2g^2}{c^2}$ ein, so ergibt sich:

$$f(v) = \int \sqrt{\frac{\frac{v^2}{c^2} - (v^2+k)(v^2+g^2)}{v^2(v^2+k)}}\, dv.$$

Enneper hat diese Fläche bei seinen Untersuchungen über asymptotische Linien angegeben. (Göttingische Gelehrte Anzeigen, Jahrgang 1870, 3. pag. 502).

Um das Profil der zugehörigen Rotationsfläche zu erhalten, die konstantes, negatives Krümmungsmass hat, haben wir $g = 0$ zu setzen. Dann ergibt sich:

$$f(v) = \int \sqrt{\frac{\frac{1}{c^2} - (v^2+k)}{v^2+k}}\, dv.$$

Diese Gleichung geht für den Wert 0 der Integrationskonstante k wieder in die des Profils der gewöhnlichen Traktrix über.

Auf genau analogem Wege lassen sich die Schraubenflächen finden, die konstantes positives Krümmungsmass haben. Ist c^2 das konstante reziproke Produkt der Hauptkrümmungsradien, ist k wieder eine Integrationskonstante, so finden wir als Profil dieser Schraubenfläche:

$$f(v) = \int \sqrt{\frac{\frac{v^2}{c^2} - (v^2+g^2)(k-v^2)}{v^2(k-v^2)}}\, dv.$$

Die zugehörige Rotationsfläche wird wieder erhalten, wenn $g = 0$ ist; nämlich:

$$f(v) = \int \sqrt{\frac{\frac{1}{c^2} - (k - v^2)}{k - v^2}}.$$

Nehmen wir nun die Integrationskonstante $k = \frac{1}{c^2} = r^2$ an, so folgt:

$$f(v) = \int \frac{\pm v dv}{\sqrt{r^2 - v^2}} = \pm \sqrt{r^2 - v^2}.$$

Ersetzen wir $f(v)$ durch z, v durch x, so ergibt sich die Gleichung:

$$x^2 + z^2 = r^2.$$

Wir finden also durch unsere Formeln das bekannte Resultat bestätigt, dass die Kugel konstantes positives Krümmungsmass hat.

§ 8. Krümmungslinien.

Die Krümmungslinien, die stets reell sind und sich unter rechten Winkeln schneiden, haben als analytischen Ausdruck die Differentialgleichung, die sich durch Multiplikation der Gleichung zur Bestimmung der Tangenten in den Hauptschnitten mit du^2 ergibt. Dieselbe heisst alsdann:

$$g\left[\frac{1}{v} + \frac{f'(v)f''(v)}{1+f'(v)^2}\right] dv^2 - \left[vf'(v) - \frac{f''(v)}{1+f'(v)^2}(g^2+v^2)\right] du\,dv$$
$$- g\left[\frac{g^2}{v(1+f'(v)^2)} + v\right] du^2 = 0.$$

Die Variabeln sind in dieser Gleichung getrennt; somit hängt die Integration nur von Quadraturen ab.

Wir betrachten einige besondere Fälle:

1. Für die Schraubenfläche mit Leitebene ist $f(v) =$ const. zu setzen. Dann erhalten wir:

$$\frac{1}{v}dv^2 - \frac{g^2+v^2}{v}du^2 = 0, \qquad \text{oder}$$

$$du = \pm \frac{dv}{\sqrt{g^2+v^2}}.$$

Zur Integration setzen wir:

$$\sqrt{g^2+v^2} = g + tv,$$

so dass wir erhalten:

$$du = \frac{2dt}{1-t^2}.$$

Ist b eine Integrationskonstante, so folgt:

$$u - b = \log \frac{v + (\sqrt{v^2+g^2} - g)}{v - (\sqrt{v^2+g^2} - g)}.$$

Die Umkehrung ergibt:

$$v = g\left(e^{u-b} - e^{-(u-b)}\right).$$

2. Setzen wir in der Differentialgleichung der Krümmungslinien den Koeffizienten von $du \,.\, dv$ gleich Null, so ergibt sich:

$$vf'(v) = \frac{f''(v)}{1+f'(v)^2}(g^2+v^2).$$

Bezeichnet c eine Integrationskonstante, so ist das Profil der Schraubenfläche, für die diese Gleichung erfüllt ist, folgendermassen dargestellt:

$$f(v) = \int \frac{c\,dv\,\sqrt{g^2+v^2}}{\sqrt{1-c^2(g^2+v^2)}}.$$

Bei dieser Fläche sind die Krümmungslinien in folgender Gleichung enthalten:

$$du = \frac{dv}{\sqrt{g^2+v^2}\,\sqrt{1-c^2(g^2+v^2)}}.$$

3. Der Faktor von du^2 ergibt, gleich Null gesetzt, ein imaginäres Resultat für $f(v)$, so dass also keine Schraubenfläche die erzeugenden Schraubenlinien zu Krümmungslinien hat. Setzen wir hingegen den Faktor von dv^2 gleich Null, so ergibt sich:

$$\frac{1}{v} + \frac{f'(v)f''(v)}{1+f'(v)^2} = 0,$$

oder nach einer Integration, durch welche die Konstante l eingeführt wird:

$$f'(v) = \sqrt{\frac{l^2-v^2}{v^2}},$$

$$f(v) = \sqrt{l^2-v^2} + l \log \frac{l-\sqrt{l^2-v^2}}{v}.$$

Wir erkennen, dass das Traktrixhelikoid den Koeffizienten von dv^2 zu Null macht. Die Differentialgleichung der Krümmungslinien heisst also:

$$\frac{dv.du}{\sqrt{l^2-v^2}} + \frac{gv}{l^2} du^2 = 0.$$

Die eine Schar von Krümmungslinien ist

$$u = \text{const.};$$

die andere wird bestimmt durch die Differentialgleichung:

$$-g\,du = -\frac{l^2\,dv}{v\sqrt{l^2-v^2}}.$$

Die Integration ergibt (b = Konstante):

$$-g(u+b) = l \log \frac{v}{l+\sqrt{l^2-v^2}}.$$

Die Umkehrung bringt hervor:

$$v = \frac{2l}{e^{\frac{g}{l}(u+b)} + e^{-\frac{g}{l}(u+b)}}.$$

Das Resultat u = const. lässt die eine Schar von Krümmungslinien als ebene Kurven erkennen und zwar ist jede Traktrix auf der Fläche auch Krümmungskurve. Wir sind somit in Uebereinstimmung mit Enneper. Derselbe suchte nach Flächen mit konstantem negativem Krümmungsmass. Da diese Annahme nicht ausreichte, seine Gleichungen integrabel zu machen, so fügte er noch die hinzu, dass eine Schar von Krümmungskurven plan sei. Diesen beiden Annahmen entsprach das Traktrixhelikoid.

4. Welche Schraubenfläche hat die Horizontalprofile zu Krümmungslinien?

Für diese Fläche muss längs der einen Schar von Krümmungskurven $z = \text{const.}$, also $dz = 0$ sein. Nun ist:

$$v = gu + f(v),$$
$$dz = g\,du + f'(v)\,dv = 0,$$
$$du = -\frac{f'(v)}{g}\,dv.$$

Setzen wir diese Beziehung in der Differentialgleichung der Krümmungskurven ein, so ergibt sich nach einigen Umformungen:

$$f'(v)\,f''(v) = \frac{g^2}{v^3},$$

$$f'(v) = \frac{\sqrt{c\,v^2 - g^2}}{v^2},$$

$$f(v) = \int \frac{\sqrt{c\,v^2 - g^2}}{v^2}\,dv.$$

Die verlangte Eigenschaft ist also nur den abwickelbaren Schraubenflächen zu eigen. Für dieselben lautet die Differentialgleichung der Krümmungslinien:

$$\sqrt{c\,v^2 - g^2}\,dv^2 - \frac{v}{g}(c\,v^2 - 2\,g^2)\,du\,dv - v^2\sqrt{c\,v^2 - g^2}\,du^2 = 0.$$

Wenn wir die erlangte Erkenntnis über die eine Schar der gesuchten Kurven benutzen, so zerfällt diese Gleichung folgendermassen:

$$\left[\frac{\sqrt{c\,v^2 - g^2}}{v}\,dv + g\,du\right] \cdot \left[v\,dv - \frac{v^2\sqrt{c\,v^2 - g^2}}{g}\,du\right] = 0.$$

Somit heisst die Differentialgleichung der zweiten Schar von Krümmungskurven:

$$du = \frac{g\,dv}{v\sqrt{c\,v^2 - g^2}}.$$

Die Integration ergibt, wenn b eine Konstante bedeutet:

$$-(u + b) = arc\sin\frac{g}{\sqrt{c}\,v}, \qquad \text{oder:}$$

$$-v.\sin(u+b)=\frac{g}{\sqrt{v}}.$$

Diese Gleichung enthält die erzeugenden Geraden.

§ 9. Asymptotenlinien.

Die Krümmungslinien haben die Eigenschaft, dass ihre Tangenten überall mit den Hauptaxenrichtuugen des Dupin'schen Kegelschnitts zusammenfallen. Diejenigen Linien, deren Tangenten in jedem Punkte mit den asymptotischen Richtungen der Indikatrix übereinstimmen, heissen Asymptotenlinien. Dieselben sind nur dann reell, wenn die Indikatrix reelle Asymptoten hat, wenn die Fläche im betrachteten Punkt hyperbolisch gekrümmt ist, d. h. ein negatives Krümmungsmass hat.

Die Differentialgleichung der Asymptotenlinie heisst:

$$\Theta\,du^2+2\,\Theta'\,du\,dv+\Theta''\,dv^2=0.$$

Demnach sind die Asymptotenlinien der Schraubenflächen in folgender Gleichung enthalten:

$$-v^2f'(v)du^2+2g\,du\,dv-vf''(v)dv^2=0.$$

1. Für die Schraubenfläche mit Direktorebene erhalten wir in diesem Falle:

$$u=\text{const.},\quad v=\text{const.}$$

Die Asymptotenkurven werden also gebildet durch die erzeugenden Geraden und durch eine Schar von Schraubenlinien auf der Fläche.

2. Die Kurven $u=$const. bleiben auch dann noch Asymptotenlinien, wenn

$$f'(v)=0,\ f(v)=av+b \qquad \text{ist.}$$

Die andere Schar von Asymptotenlinien heisst dann:

$$-(u-u_0)=\frac{2g}{a}\cdot\frac{1}{v}.$$

3. Soll die linke Seite der vorliegenden Differentialgleichung ein vollständiges Quadrat werden, so muss

$$f'(v)f''(v)=\frac{g^2}{v^3},$$

also

$$f(v)=\int\sqrt{\frac{c\,v^2-g^2}{v^2}}+b=\sqrt{c\,v^2-g^2}+g\,arc\sin\frac{g}{\sqrt{c}.v}+b$$

sein, wenn c und b Integrationskonstanten bedeuten. Für diese Fläche, die wir als die abwickelbare Schraubenfläche (cf. pag. 12 und pag. 16) erkennen, heisst also die Differentialgleichung der Asymptotenlinien:

$$\left(\sqrt{v}\cdot\sqrt[4]{c\,v^2-g^2}\,du-\frac{g}{\sqrt{v}\,\sqrt[4]{c\,v^2-g^2}}\,dv\right)^2=0.$$

Daraus folgt:

$$du=\frac{g}{v\sqrt{c\,v^2-g^2}}\,dv.$$

Die Integration ergibt:

$$u-u_0=-arc\sin\frac{g}{\sqrt{c}.v}.$$

4. Für die Rotationsflächen haben wir die Differentialgleichung:

$$v\,f'(v)\,du^2+f''(v)\,dv^2=0,$$

welche durch die Quadratur

$$u=\pm\int\sqrt{\frac{-f''(v)}{v\,f'(v)}}\,dv$$

gelöst wird. Entsprechend dem einleitend gesagten bemerken wir auch hier, dass die Kurven nur an den Stellen reell sind, wo die Meridiankurve konvex gegen die Rotationsaxe ist.

§ 10. Abwicklung der Schraubenflächen.

Die notwendige und hinreichende Bedingung der Abwickelbarkeit ist die Übereinstimmung der Fundamentalgrössen E, F und G. Wir verdanken Edmond Bour den Beweis, dass zu jeder Schraubenfläche andere solche und eine Schar von Rotationsflächen gehören, welche auf sie abwickelbar sind. [E. Bour: Mémoire sur la déformation des surfaces. Journal de l'École polytechnique. Cahier 39, pag. 82.

Darboux: Leçons sur la théorie etc. tome I, p. 82. L'Abbé Aoust: Analyse des courbes etc. p. 201 ff.]

Das Linearelement der Schraubenfläche heisst:

$$ds^2=(g^2+v^2)\,du^2+2\,gf'(v)\,du\,dv+(1+f'(v)^2)\,dv^2.$$

Dasselbe lässt sich auch in folgender Form schreiben:

$$ds^2=\left(1+\frac{v^2f'(v)^2}{g^2+v^2}\right)dv^2+(v^2+g^2)\left(du+\frac{gf'(v)\,dv}{g^2+v^2}\right)^2$$

Wir führen nun eine neue Variable u_1 statt u ein, indem wir schreiben:

$$du_1=du+\frac{gf'(v)}{g^2+v^2}\,dv.$$

Die Berechtigung dazu, die rechts stehende Summe einem exakten Differential gleich zu setzen, ist vorhanden, weil die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist. Das System der Kurven $u_1=$const. ist das System der orthogonalen Trajektorien zu dem System $v=$const., den Schraubenlinien auf der Fläche. Mithin heisst nun das Linearelement, wenn wir wieder u statt u_1 schreiben:

$$ds^2=(v^2+g^2)\,du^2+\left(1+\frac{v^2f'(v)^2}{g^2+v^2}\right)dv^2.$$

Eine Rotationsfläche sei nun charakterisiert durch die Meridiangleichung:

$$z_1=\varphi(v_1).$$

Dann heisst das Linearelement derselben, bezogen auf die orthogonalen Kurvensysteme der Meridiane und Parallelkreise:

$$ds_1^2=v_1^2\,du_1^2+(1+\varphi'(v_1)^2)\,dv_1^2,$$

oder allgemeiner, wenn c ganz beliebig ist:

$$ds_1^2=(cv_1)^2\,d\left(\frac{u_1}{c}\right)^2(1+\varphi'(v_1)^2)\,dv_1^2.$$

Sollen nun Schraubenfläche und Rotationsfläche auf einander abwickelbar sein, so muss völlige Identität der Linearelemente in ihren einzelnen Teilen vorhanden sein. Dieselbe wird durch folgende Gleichungen hergestellt:

$$c\,du=du_1,\quad v^2+g^2=c^2v_1^2,$$

$$(1+\varphi'(v_1)^2)\,dv_1^2 = \left(1+\frac{v^2}{g^2+v^2}f'(v)^2\right)dv^2.$$

Wir suchen nun diejenige Rotationsfläche, auf die eine gegebene Schraubenfläche abwickelbar ist. Zu dem Zwecke eliminieren wir v und erhalten:

$$\left(\frac{d\varphi}{dv_1}\right)^2 = \frac{(c^4v_1^2-c^2v_1^2+g^2)c^2v_1^2+(c^2v_1^2-g^2)^2\left(\frac{df}{dv_1}\right)^2}{c^2v_1^2(c^2v_1^2-g^2)}.$$

Demnach erhalten wir als Meridiangleichung der Rotationsflächen:

$$z=\varphi_1(\varphi)=\int\frac{dv_1}{cv_1}\sqrt{\frac{(c^4v_1^2-c^2v_1^2+g^2)+(c^2v_1^2-g^2)^2\left(\frac{df}{dv_1}\right)^2}{c^2v_1^2-g^2}}+d.$$

Suchen wir umgekehrt die Schraubenfläche, die auf eine gegebene Rotationsfläche abwickelbar ist, so ergibt sich:

$$f(v)=\int\frac{dv}{v}\sqrt{(g^2+v^2)\left[\left(\frac{d\varphi}{dv}\right)^2-c^2\right]-v^2}+d.$$

Da in den Integralen die willkürliche Grösse c vorkommt, so gibt es jedes Mal ein ganzes System von Flächen der einen Art, die auf eine Fläche der anderen Art abwickelbar sind.

Sind in besonderen Fällen die beiden letztgenannten Integrale ausführbar, so lässt sich in endlicher Form angeben, welche Schraubenflächen auf eine gegebene Rotationsfläche abwickelbar sind und umgekehrt.

Die auf die Kugel abwickelbaren Schraubenflächen sind von Herrn Kuen berechnet und modelliert worden (cf. Mathematische Modelle etc. No. 14).